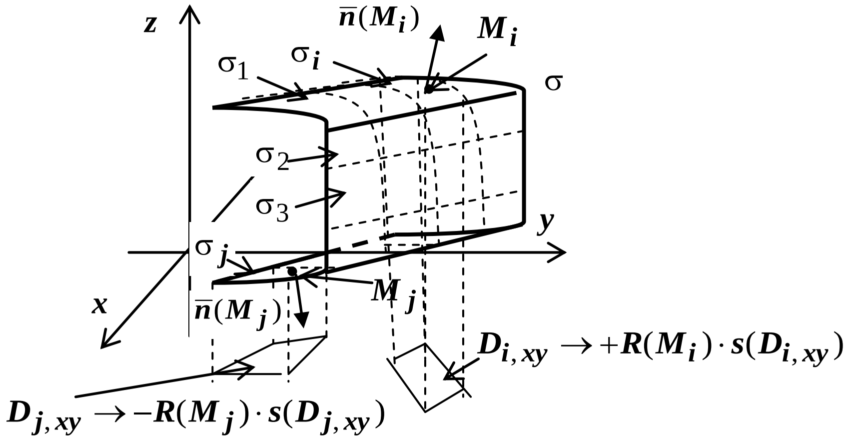
16.4.4. Поверхностный интеграл второго рода (по координатам).

16.4.4.1. Определение поверхностного интеграла второго рода. Пусть в пространстве переменных $\boldsymbol{x,y,z}$ задана ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность σ, на которой введена ориентация (т.е. с помощью единичного вектора нормали в какой-либо точке σ задана сторона поверхности), и на которой определена функция $\boldsymbol{R(x,y,z)}$. Разобьём поверхность на $\boldsymbol{n}$ частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{\boldsymbol{i}}, \ldots \sigma_{\boldsymbol{n}}$, на каждой из частей $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ выберем произвольную точку $\boldsymbol{M_i}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{z_i})$, найдём $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{z_i})$, нормаль $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M_i})$ в точке $\boldsymbol{M_i}$ к выбранной стороне поверхности, и площадь $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i,xy}})$ проекции части $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ на плоскость $\boldsymbol{OXY}$. В интегральную сумму слагаемое



$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i}) \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i,xy}})$ возьмём со знаком "+", если $\cos\gamma \geq 0$ (т.е. если угол γ между $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M_i})$ и осью $\boldsymbol{Oz}$ - острый; проекция $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ на орт $\overline{\boldsymbol{k}}$ оси $\boldsymbol{Oz}$ положительна), и со знаком "-", если $\cos\gamma < 0$. В результате интегральная сумма будет иметь вид $\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \pm \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i}) \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i,xy}})$. Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\max\limits_{\boldsymbol{i}=1,2,\ldots \boldsymbol{n}} \operatorname{diam}\sigma_{\boldsymbol{i}} \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ $(\boldsymbol{i} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{n})$, ни от выбора точек $\boldsymbol{M_i}$, то функция $\boldsymbol{R(x,y,z)}$ называется интегрируемой по поверхности σ, а значение этого предела называется поверхностным интегралом второго рода, или поверхностным интегралом по координатам $\boldsymbol{x,y}$, и обозначается $\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dxdy}$.

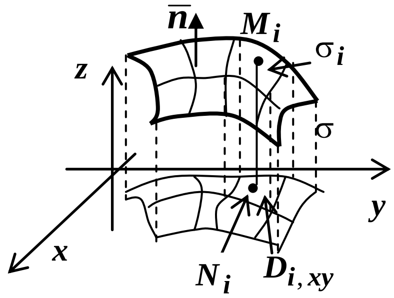
Теорема существования. Если функция $\boldsymbol{R(x,y,z)}$ непрерывна на поверхности σ, то она интегрируема по этой поверхности.

Если на поверхности σ, вместе с функцией $\boldsymbol{R(x,y,z)}$, определены функции $\boldsymbol{P(x,y,z)}$ и $\boldsymbol{Q(x,y,z)}$, то, так же, как и интеграл $\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dxdy}$, определяются интегралы $\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dydz}$ и $\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dxdz}$; в приложениях, как мы видели из рассмотренной в начале раздела физической задачи, обычно рассматривается сумма этих интегралов, которая обозначается

$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dydz} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dxdz} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{dxdy}$.

16.4.4.2. Свойства поверхностного интеграла второго рода. Для этого интеграла, как и для криволинейного интеграла второго рода, имеет смысл формулировать следующие свойства: **линейность, аддитивность и зависимость поверхностного интеграла от выбора стороны поверхности: при изменении ориентации поверхности интеграл меняет знак.**

16.4.4.3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода. Пусть поверхность σ взаимно однозначно проецируется в область $\boldsymbol{D_{xy}}$ на плоскости $\boldsymbol{Oxy}$. В этом случае $\cos\gamma$ имеет одинаковый знак во всех точках поверхности. Именно, $\cos\gamma > 0$, если рассматривается верхняя сторона поверхности, и $\cos\gamma < 0$, если рассматривается нижняя сторона. Поэтому для верхней стороны все слагаемые в интегральной сумме должны браться со знаком "+", и сумма будет иметь вид



$\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i}) \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i,xy}}) = \sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{z_i}) \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i,xy}})$. Если поверхность задана уравнением $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,

$(x, y) \in D_{xy}$, то эта сумма равна $\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \cdot s(D_{i,xy})$. В последней сумме легко увидеть интегральную сумму для двойного интеграла $\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$. Переход к пределу при $\max_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} \sigma_i \to 0$ (при этом и $\max_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} D_{i,xy} \to 0$) даст

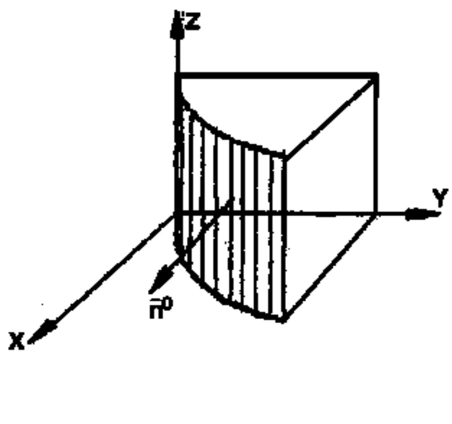
$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$. Напомню, что эта формула получена для верхней стороны поверхности. Если выбрана нижняя сторона, то все слагаемые в интегральной сумме должны браться со знаком "-", и интегральная сумма будет иметь вид

$-\sum_{i=1}^{n} R(M_i) \cdot s(D_{i,xy}) = -\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i) \cdot s(D_{i,xy})$. Рассуждая, как и для верхней стороны, получим, что в этом случае $\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$. Окончательно,

$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$, где знак "+" берётся для верхней стороны поверхности, знак "-" - для нижней стороны.

Аналогично изложенному, для других интегралов: $\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz$, если поверхность однозначно проецируется в область D_{yz} на плоскости Oyz, при этом знак "+" берётся для "передней" стороны поверхности (где $\cos\alpha > 0$), для "задней" стороны, где $\cos\alpha < 0$, берётся знак "-"; $\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz$, если поверхность однозначно проецируется в область D_{xz} на плоскость Oxz, знак "+" берётся для "правой" стороны поверхности (где $\cos\beta > 0$), для "левой" стороны, где $\cos\beta < 0$, берётся знак "-". Как и для поверхностного интеграла первого рода, если проецирование не взаимно однозначно, поверхность разбивается на части, которые проецируются однозначно.

Примеры. 1. Вычислить $I = \iint_{\sigma} (x + z)dydz + (8y - x)dxdz + (2x^2 - y)dxdy$, σ - часть поверхности цилиндра $y = \frac{x^2}{4}$, заключенная между плоскостями x=0, x=8, z=0, z=3. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью Ox.



Решение: Определяем знаки направляющих косинусов нормали $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$, $\cos\gamma=0$. Поэтому

$I = \iint_{\sigma} (x + z)dydz + (8y - x)dxdz + (2x^2 - y)dxdy =$

$= \iint_{D_{yz}} (x(y, z) + z)dydz - \iint_{D_{xz}} (8y(x, z) - x)dxdz$, где

D_{yz}={(y,z): 0≤ y ≤16, 0 ≤ z ≤ 3}, D_{xz}={(x,z): 0 ≤ x ≤ 8, 0 ≤ z ≤ 3} - проекции σ на плоскости Oyz и Oxz соответственно. Проекция поверхности σ на плоскость Oxy вырождается в линию - параболу $y=\frac{x^2}{4}$, $\cos\gamma=0$, поэтому интеграл по D_{xy} в данном случае отсутствует. Вычислим отдельно интегралы по D_{yz} и D_{xz}, выражая $x(y,z)$ и $y(x,z)$ из уравнения поверхности σ: $x(y,z)=2\sqrt{y}$, $y(x,z)=\frac{x^2}{4}$.

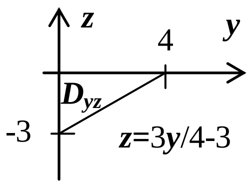
$\iint\limits_{D_{yz}} (x(y,z)+z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} (2\sqrt{y}+z)dydz = \int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{16} (2\sqrt{y}+z)\,dy$=328, $\iint\limits_{D_{xz}} (8y(x,z)-x)dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (2x^2-x)dxdz$

$=\int\limits_0^3 dz \int\limits_0^8 (2x^2-x)\,dx$=928. Окончательно I = 328 - 928 = - 600.

2. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma} 3xdydz + zdxdz + 5ydxdy$, где σ - часть плоскости $2x+3y-4z=12$, ограниченная координатными плоскостями x=0, y=0, z=0. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью Oz.

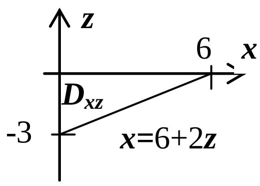
Решение. Из двух направлений нормали к σ $\bar{n} = \pm\dfrac{2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{4+9+16}}$ мы должны выбрать такое, для которого коэффициент при орте $\bar{k}$ (т.е. $\cos\gamma$) положителен, поэтому выбираем знак "-", тогда $\bar{n} = \dfrac{-2\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{29}}$. В соответствии со знаками направляющих косинусов,

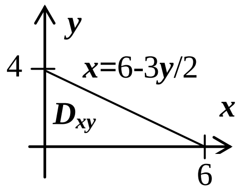
$I = \iint\limits_{\sigma} 3xdydz + zdxdz + 5ydxdy = -\iint\limits_{D_{yz}} 3x(y,z)dydz - \iint\limits_{D_{xz}} zdxdz + \iint\limits_{D_{xy}} 5ydxdy$. Вычисляем эти интегралы.



1. $-3\iint\limits_{D_{yz}} x(y,z)dydz = \left| x = 6-3y/2+2z \right| = -3\iint\limits_{D_{yz}} \left(6-\dfrac{3y}{2}+2z\right)dydz =$

$= -3\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3}{4}y-3}^{0} \left(6-\dfrac{3}{2}y+2z\right)dz = -3\int\limits_0^4 \left(\dfrac{9}{16}y^2-\dfrac{9}{2}y+9\right)dy = -3(12-36+36) = -36$.





2. $-\iint\limits_{D_{xz}} zdxdz = -\int\limits_{-3}^{0} zdz \int\limits_0^{6+2z} dx = -\int\limits_{-3}^{0} (6+2z)zdz = 27-18 = 9$.

3. $5\iint\limits_{D_{xy}} ydxdy = 5\int\limits_0^4 ydy \int\limits_0^{6-\frac{3}{2}y} dx = 5\int\limits_0^4 \left(6-\dfrac{3}{2}y\right)ydy =$

$=5(48-32) = 80$. Окончательно, $I = -36+9+80 = 53$.

В заключение напомню, что **вычисление поверхностного интеграла второго рода всегда можно свести к вычислению поверхностного интеграла первого рода**. Так, в последнем примере подынтегральное выражение равно $(\bar{v}(M)\cdot\bar{n}(M))d\sigma$, где $\bar{v}(M) = 3x\bar{i}+z\bar{j}+5y\bar{k}$,

$\bar{n}(M) = \cos\alpha\bar{i}+\cos\beta\bar{j}+\cos\gamma\bar{k} = \dfrac{-2\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{29}}$. Поэтому $\bar{v}(M)\cdot\bar{n}(M) = \dfrac{-6x-3z+20y}{\sqrt{29}}$, и, проектируя σ на плоскость Oxy $\left(d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \dfrac{\sqrt{29}}{4}dxdy\right)$, получим

$$I = \iint\limits_{\sigma} 3xdydz + zdxdz + 5ydxdy = \iint\limits_{\sigma} \frac{-6x-3z+20y}{\sqrt{29}}d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{-6x-3z+20y}{\sqrt{29}}\cdot\frac{\sqrt{29}}{4}\right|_{z=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-3} dxdy =$$

$$= \frac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}} \left(-\frac{15}{2}x+\frac{71}{4}y+9\right)dxdy = \frac{1}{4}\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} \left(-\frac{15}{2}x+\frac{71}{4}y+9\right)dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^6 \left(\frac{161}{18}x^2-\frac{250}{3}x+178\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}(644-1500+1068) = \frac{212}{5} = 53.$$